KALKÜLÜS
7. Hafta
Süreklilik

İç nokta - Uç nokta: p noktası bir fonksiyonun tanım kümesine ait olmak üzere, eğer p noktası tanım kümesi içinde kalan açık bir aralık içinde ise bu p noktasına kümenin <u>iç noktası</u> denir. Eğer p iç nokta değilse p'ye <u>uç nokta</u> denir.

* Örneğin, $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ fonksiyonunun tanım kümesi $[-2,2]$ kapalı aralığıdır. Bu aralık, $(-2,2)$ aralığındaki iç noktalar, sol uç noktası -2 ve sağ uç noktası 2'den oluşur.
* $(-1,1)$ aralığı sadece iç noktalardan oluşur, uç noktalar yoktur.

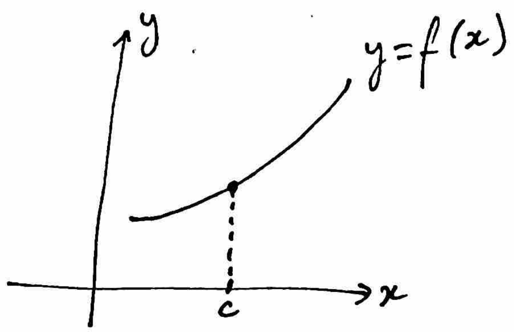
Bir iç noktada süreklilik

c noktası $f(x)$ fonksiyonunun tanım kümesinin bir iç noktası olmak üzere, eğer $\lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)$ ise $f(x)$ fonksiyonu c iç noktasında <u>süreklidir</u> denir.

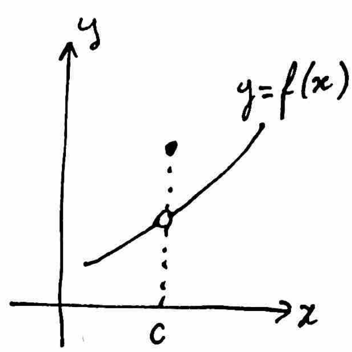
$\lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)$ →
- $f(x)$, $x=c$ de tanımlı
- $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ limiti mevcut
- $\lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)$

Bu koşullar sağlanmazsa $f(x)$ fonksiyonu $x=c$ de <u>süreksizdir</u> denir.

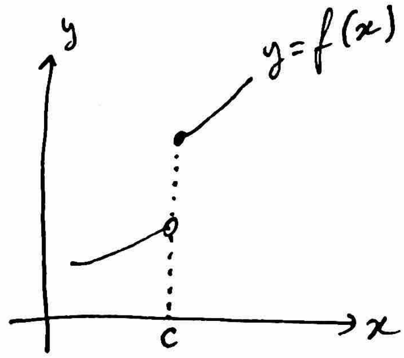
<u>Not</u>. Sürekli fonksiyonların grafiğinde "kopukluk" yoktur



$f(x)$ c'de sürekli



$f(x)$, c'de süreksiz çünkü $\lim\limits_{x\to c} f(x) \neq f(c)$



$f(x)$, c'de süreksiz çünkü $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ mevcut değil

<u>Sağ-Sol Süreklilik</u>:

Bir $f(x)$ fonksiyonu ve $x=c$ noktası için,

* $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = f(c)$ ise $f(x)$ c'de <u>sağdan sureklidir</u>.

* $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = f(c)$ ise $f(x)$ c'de <u>soldan süreklidir</u>.

<u>Not</u>. Bir $f(x)$ fonksiyonunun c noktasında sürekli olması için <u>hem sağdan</u> <u>hem soldan</u> c'de sürekli olması gerekir.

Örnek $h(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \text{ ise} \\ 0, & x < 0 \text{ ise} \end{cases}$

$h(x)$ fonksiyonu $x=0$' da sürekli midir?

$\lim_{x \to 0^+} h(x) = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1 = f(0)$ ✓ $h(x)$ $x=0$ da sağdan sürekli

$\lim_{x \to 0^-} h(x) = \lim_{x \to 0^-} 0 = 0 \neq f(0)$ ✗ $h(x)$ $x=0$ da soldan sürekli değildir.

O halde $h(x)$, $x=0$ da sürekli değildir.

Kapalı Aralıkta Süreklilik

$f(x)$ fonksiyonu bir $[a,b]$ aralığında tanımlı olsun. $f(x)$ in bu aralıkta sürekli olması için:

(i) $f(x)$, (a,b) aralığında sürekli

(ii) $f(x)$, $x=a$' da sağdan sürekli

(iii) $f(x)$, $x=b$ 'de soldan sürekli

Sürekli fonksiyon: Tanım kümesindeki her noktada sürekli olan fonksiyona sürekli fonksiyon denir.

Örneğin, tüm polinomlar, rasyonel fonksiyonlar, $\sin x$, $\cos x$ gibi trigonometrik fonksiyonlar, mutlak değer fonksiyonu tanımlı oldukları her yerde süreklidir.

Sürekli Fonksiyonların Özellikleri

a) $f(x)$ ve $g(x)$, $x=c$ de sürekli ise

(i) $f(x) \pm g(x)$

(ii) $f(x)/g(x)$, $g(c)\neq 0$ şartı ile

(iii) $(f(x))^n$, $n \in \mathbb{Z}^+$

(iv) $\sqrt[n]{f(x)}$, $n\in\mathbb{Z}^+$; n çift ise $f(x)\geq 0$ olmak üzere

fonksiyonları da $x=c$ de süreklidir

b) $f(x)$, $x=c$ de sürekli ve g fonksiyonu da $f(c)$ de sürekli ise o zaman $g \circ f$ fonksiyonu da c'de süreklidir.

c) Eğer g, bir b noktasında sürekli ve $\lim\limits_{x\to c} f(x)=b$ ise

$$\lim_{x\to c} g(f(x)) = g(b) = g\left(\lim_{x\to c} f(x)\right)$$

Süreksizlik Çeşitleri

i) Sıçramalı Süreksizlik: Bir fonksiyonun bir noktada hem sağdan hem de soldan limitleri mevcut ancak eşit değilse.

Örnek $f(x) = \begin{cases} 2+x, & x\geq 0 \\ x, & x<0 \end{cases}$ $x=0$ daki sürekliliği?

$$\lim_{x\to 0^+} (2+x) = 2 \neq \lim_{x\to 0^-} x = 0$$

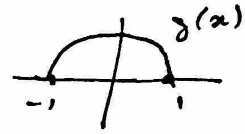
Demek ki $x=0$ da sıçramalı süreklilik vardır.

ii) <u>Sonsuz süreksizlik</u> : Bir fonksiyonun bir noktadaki limiti $\pm\infty$ ise.

<u>Örnek</u> $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ nin $x=0$'da sonsuz süreksizliği var.

iii) <u>Esas Süreksizlik</u> : Bir fonksiyonun $x=a$'da limiti mevcut degilse.

<u>Örnek</u>. $g(x)=\sqrt{1-x^2}$ nin $x=1$'de sağ limiti olmadığı için limiti yoktur.



iv) <u>Kaldırılabilir Süreksizlik</u> : Bir f fonksiyonu bir a noktasında tanımsız ya da süreksiz fakat orada sürekli olacak şekilde o tek noktada yeniden tanımlanabiliyorsa

<u>Örnek</u>.
$$g(x)=\begin{cases} x, & x\neq 2 \text{ ise} \\ 1, & x=2 \text{ ise}\end{cases}$$

fonksiyonu $x=2$'de kaldırılabilir süreksizliğe sahiptir. Süreksizliği kaldırmak için $g(2)=2$ olarak tanımlanır.