

Soyut Matematik ve Mantık-II

12. Hafta Konu Özeti (Sayfa 142-148)

Alt ve Üst Sınırlar

Bu bölümde tikel sıralı kümelem en büyük, en küçük, minimal ve maksimal elemanlarını tanımlayacağız.

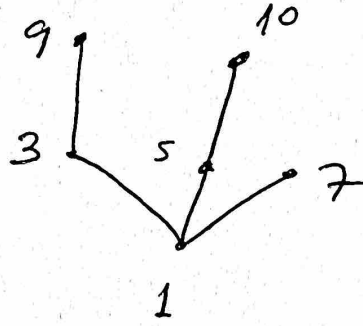
Tanım. (X, \leq) kısmi sıralı bir sistem ve $A \subseteq X$ olsun. A 'nin her öğesinde küçük olan $x \in X$ öğesinde A 'nin altsınuru denir.

Not. Kısmi sıralı sistemlerde bir altsınur her zaman ~~olmaz~~ olmayabileceği gibi birden fazla altsınur da olabilir.

Tanım. (X, \leq) kısmi sıralı bir sistem ve $A \subseteq X$ olsun. A 'nin altsınırlarının en büyüğüne A 'nin infimum'u denir ve $\inf(A)$ olarak gösterilir.

Örnek 1. $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$ bir küme ve $a|b$ tam bölme bağıntısı olsun.

$(A, |)$ kısmi sıralı kümenin Hasse diyagramı



şeklinde dir. Buna göre A kümesinin A 'daki' ~~alt sınırı $\{1\}$ kümesidir.~~ alt sınırı 1 'dir.

Örneğin $\{10\} \subseteq A$ kümesinin A 'daki' alt sınırları 10, 5 ve 1 'dir. Infimum'u, yani alt sınırların en büyüğü 10 'dur.

Tanım. (X, \leq) kısmi sıralı bir küme ve $A \subseteq X$ olsun. A nun her ögesinden büyük olan $y \in X$ ögesine A nun bir üst sınırı denir.

Benzer şekilde bir kümenin üst sınırı her zaman olmayabileceği gibi birden fazla üst sınır da olabilir.

Üst sınırların en küçüğüne A kümesinin supremum'u denir ve $\sup(A)$ ile gösterilir.

Örnek 2. Yukarıdaki örneği ele alırsak

A kümesini kendisini A 'da bir üst sınırlıdır. Çünkü ~~her~~ her $a \in A$ için $a \leq y$ ifadesini sağlayan bir $y \in A$ vardır. $a \leq y$ ifadesinde \leq ilişkisinden kastımız ~~bu~~ "tam bölünebilirlik" ilişkisidir. A 'daki her elemanı tam bölen bir eleman A 'da olmadığından dolayı, A 'nın üst sınırı yoktur. Ancak $\{1, 5\}$ kümesinin A 'daki üst sınırları 5 ve 10 olur. $\sup(\{5, 10\}) = 5$ olur.

En Büyük öğe ve Maksimal öğe

Tanım. (X, \leq) kısmi sıralı bir sistem ~~se~~ olsun. Her $x \in X$ için $x \leq a$ ifadesini sağlayan bir $a \in X$ öğesi varsa buna X 'in en büyük elemanı denir.

Örnek 3. Örnek 1'deki $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$ kümesini ve bu küme üzerinde tanımlı $a|b$ ilişkisini ele alalım. A 'nın her elemanının tam bölen bir elemanı olmadığı için A 'nın en büyük elemanı yoktur.

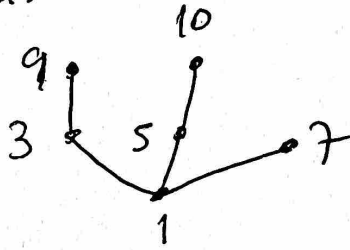
Ancak $a|b$ "tam bölme" ilişkisi yerine bildiğimiz $a \leq b$ ilişkisini ele alırsak (A, \leq) sıralı sisteminde en büyük eleman 10 olur.

Örnek 4. $B = \{2, 4, 8, 16\}$ ve $a|b$ ilişkisini ele alalım. Bu durumda 16 ~~her~~ B 'deki her sayıyı tam böldüğü için 16 B 'nin $a|b$ ilişkisine göre en büyük elemanıdır.

Tanım. (X, \leq) bir kısmi sıralı sistem olsun. ~~Eğer~~ ve $a \in X$ olsun. Eğer $a \leq b$ ifadesini sağlayan bir $b \in X$ yoksa, a elemanına X 'in maksimal elemanı denir.

Örnek 5. Yine bir önceki örneklerdeki

$(A, |)$ kısmi sıralı sistemi ele alalım ve bunun Hasse diyagramını dikkate alalım.



Bu durumda 9'u, 10'u ve 7'yi tam bölen bir eleman olmadığı için 9, 10 ve 7 maksimal elemanlardır. Ancak A'daki tüm sayıları tam bölen bir eleman olmadığı için A'nın en büyük elemanı yoktur.

Not. En büyük eleman aynı zamanda maksimal elemandır.

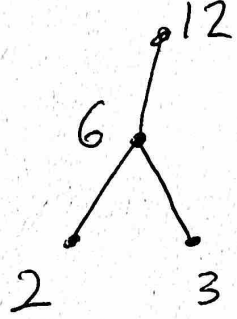
En küçük eleman ve Minimal eleman

Tanım. Bir kısmi sıralı sistemde, her elemandan küçük olan elemana en küçük eleman denir.

Eğer bir a elemanından daha küçük bir eleman yoksa a'ya minimal eleman denir.

Yukarıdaki örnekte hem minimal eleman hem en küçük eleman 1'dir.

Örnek 6. A kümesi yere $\{2, 3, 6, 12\}$ kümesini ele alalım. Aynı bağlantı altında Hasse diyagramı aşağıdaki gibidir:



Buna göre bu sıralı kümenin en büyük ve maksimal elemanı 12 dir. En küçük eleman yoktur ancak minimal elemanlar 2 ve 3 tür.

Öte yandan tam sıralı kümelerde en büyük/maksimal veya en küçük/minimal eleman farkı yoktur.

Örneğin (\mathbb{N}, \leq) tam sıralı sistemi düşünelim. Bu sistemde minimal eleman zaten en küçük elemandır. Maksimal eleman yoktur.