

Soyut Matematik ve Mantık-II

2. Hafta Konu Özeti (sayfa 70-78)

Kümeler

Sezgisel olarak, nesnelere oluşan topluluğa küme denir.

Bu her ne kadar matematiksel bir tanım olmasa da biz dersimizde bu tanımı kabul edeceğiz.

Kümelerle ilgili iki önemli kavram vardır. Bunlar eleman ve altküme kavramlarıdır. Bu derste öncelikle eleman olmanın ne demek olduğunu inceleyeceğiz.

Tanım.

1. Küme, belirli nesnelere oluşan topluluktur.
2. Kümeyi oluşturan nesneye kümenin öğeleri ya da elemanlar, denir
3. Bir kümeye ait elemanlar arasında bir sıralama olması gerekmez. Elemanlar, istediğimiz sırada yazabiliriz. Örn: $\{1,2,3\} = \{3,1,2\} = \{2,3,1\}$
4. Bir eleman, bir küme içinde ancak bir kez yer alabilir. Örn. $\{a,b,b,c,c\} = \{a,b,c\}$

Kümeler $\{ \}$ parantezleriyle gösterilir ve
elementler, bu parantezlerin içine yazılır.

Kümeleri göstermede ilk yöntem ~~listeleme~~ listeleme
yöntemidir. Bu gösterimde kümenin elementlerinin tümü
açık şekilde yazılır.

Örn. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{x, y, z\}$,
 $C = \{a, b, c\}$

Ancak listeleme yöntemi büyük kümeler için
çok uygun değildir. Bunun için kümenin
elementlerinin nitelendiği bir özellik belirtilir.
Örneğin, C kümesini şöyle de yazabiliriz

$$C = \{ \text{alfabenin ilk üç harfi} \}$$

Örneğin 100'den küçük doğal sayılar kümesini
nitelendirme yöntemiyle şöyle yazabiliriz

$$A = \{ x : x \text{ bir doğal sayı ve } x < 100 \}$$

Örneğin, çift sayılar kümesi

$$A = \{ x : k \text{ bir doğal sayı ve } x = 2k \}$$

şeklinde ifade edilebilir.

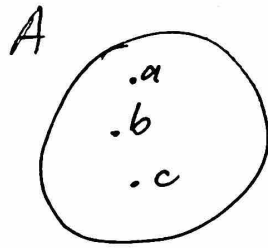
Eğer kümenin elemanlarının ne olduğu anlaşılabilirse, listeleme yöntemiyle üs nokta (...) kullanarak kümeleri yazabiliriz. Örneğin, çift sayılar kümesini listeleme yöntemiyle

$$A = \{ 0, 2, 4, 6, 8, \dots \}$$

şeklinde gösterebiliriz

Kümeleri bazen daire içine alarak da gösterebiliriz.

Örn.



Bu gösterime Venn Şeması denir.

Bir a öznesinin A kümesinin elemanı olmasını $a \in A$ olarak yazarız. Bazen $A \ni a$ da yazabiliriz.

Bu, "a elemanıdır A" diye okunur.

"A kümesi a'yı içerir" diye okunur

Bu durumun değili $a \notin A$ biçiminde gösterilir.

Evensel Küme

Evensel küme derken her şeyi içeren küme olarak algılıyoruz. Her ne kadar evensel küme kavramı matematikte paradokslara yol açıyorsa da küme cebiri konusu için evensel kümeyi var kabul etmek kolaylık sağlamaktadır.

$$E = \{x : x = x\} \text{ topluluğu her şeyi içerir.}$$

Genelde x elemanlarını, söz konusu olan nesnelere sınırlandırırız. Doğal sayılardan söz ediyorsak evensel kümeyi tüm doğal sayılar kümesi olarak düşünürüz. Ülke demografisinden bahsederken evensel kümeyi o ülkenin nüfusu olarak düşünürüz.

Tanım. Bir A kümesinin tümleyeni:

$$A' = \bar{A} = \{x : x \in E \wedge x \notin A\} \text{ olarak tanımlanır.}$$

$$\text{Demek ki: } x \in A \leftrightarrow x \notin \bar{A} \\ x \in \bar{A} \leftrightarrow x \notin A$$

Teorem. Her A kümesi için, $(A')' = A$

Kanıt. $x \in A \leftrightarrow x \notin A' \leftrightarrow x \in (A')'$

Boş küme

Tanım. Hiç elemanı olmayan kümeye boş küme denir.

Örn. $A = \{200 \text{ yaşını geçmiş ressamlar}\}$, $B = \{x: x \neq x\}$

Öksiyon: Elemanlar, aynı olan iki küme birbirine eşittir.

Teorem. Boş küme tekidir.

Kanıt. Varsayalım ki iki farklı boş küme var. Bunlara

A ve B diyelim. O zaman ~~birinde~~, $A \neq B$ olduğun

için, birinde olup diğerinde olmayan bir eleman

var olmalıdır. Ancak boş kümenin hiç elemanı yok.

Çelişki. O halde $A=B$ olmalıdır. Yani tek bir tane boş küme vardır.

Boş küme \emptyset ile ya da $\{\}$ ile gösterilir.

Ayrıca evrensel küme ile boş küme birbirlerinin tümleyeridir.