Soyut Matematik ve Mantık - II

3. Hafta Konu Özeti (sayfa 79-86)

Altküme ve Üstküme

Tanım. A ve B birer küme olsun. Eğer A'daki her eleman B'de de varsa A kümesi B'nin altkümesi olur ve $A \subseteq B$ ile gösterilir. Buna aynı zamanda "B kümesi A'nın üstkümesidir" denir ve $B \supseteq A$ şeklinde de ifade edilebilir. Yani $A \subseteq B$ demek $\forall x\,(x \in A \rightarrow x \in B)$ demektir.

Örnek 1. $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, b, c, d, e\}$

Görüldüğü gibi A'daki her eleman B kümesinde mevcut. Demek ki $A \subseteq B$. Öte yandan, $B \nsubseteq A$. Çünkü $d \in B$ olmasına rağmen $d \notin A$.

Örnek 2. $A = \{1, \{2\}, \{2, 3\}\}$, $B = \{1, \{1, 2, 3\}\}$

Bu durumda ne $A \subseteq B$ ne de $B \subseteq A$ dır.

Örnek 3. $A = \{\{a\}, b, \{a, b\}\}$, $B = \{\{a\}, \{a, b\}, \{b\}, a, b\}$

Bu durumda $A \subseteq B$ dir.

Teorem. A bir küme olsun.

(i) $A \subseteq A$

(ii) $\emptyset \subseteq A$

Kanıt. (i) A'daki her eleman mecburen A'nın içindedir. Bu yüzden $A \subseteq A$ olur.

(ii) $\emptyset \subseteq A$ demek $\forall x \, (x \in \emptyset \rightarrow x \in A)$ demektir. Ancak

$$x \in \emptyset \rightarrow x \in A$$

koşullu önermesinde $x \in \emptyset$ varsayımı her zaman yanlıştır. Varsayım yanlış olduğu için $x \in \emptyset \rightarrow x \in A$ önermesi doğrudur. Demek ki $\emptyset \subseteq A$ önermesi doğru olmak zorundadır.

Tanım. A ve B birer küme olsun.

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A.$$

Tanım. Eğer $A \subseteq B$ ama $A \neq B$ ise A kümesi B'nin özalt (ya da has alt) kümesi olur ve bu $A \subset B$ ile gösterilir.

Örnek 1 ve örnek 3'te aynı zamanda $A \subset B$ ilişkisi vardır.

Hiçbir A kümesi için, $A \subset A$ olmaz.

Kuvvet Kümesi :

Tanım. A bir küme olsun. A'nın tüm altkümelerinin kümesine A'nın kuvvet kümesi denir ve $P(A)$ ile gösterilir.

Örnek. $A = \{a, b, c\}$ olsun.

$$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}$$

Teorem. Her A kümesi için, $A \in P(A)$.

Bu yüzden $\{A\} \subseteq P(A)$.

Teorem. n elemanlı bir kümenin bütün altkümelerinin sayısı 2^n dir.

Teorem. A ve B birer küme olsun. O zaman,

$$A \subseteq B \leftrightarrow P(A) \subseteq P(B).$$

– Boşkümenin de kuvvet kümesi vardır: $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

Nicelik Sayısı (Kardinalite) :

Bir kümedeki elemanların sayısı o kümenin nicelik sayısını yani kardinalitesini verir. Bir A kümesinin kardinalitesi $|A|$ ile gösterilir.

Örnek. $A = \{a, b, \{c, d, e\}\}$ ise $|A| = 3$

Tanım. Eğer bir A kümesi için, $|A|$ bir doğal sayıya eşitse, A'ya sonlu küme denir. Aksi halde A'ya sonsuz küme denir.

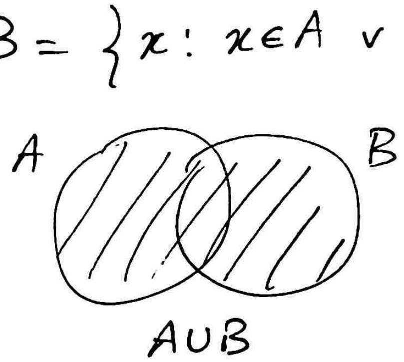
Örnekler.

1. Türkçe alfabedeki harfler kümesi $\{a, b, c, ç, \dots, y, z\}$ sonludur.
2. $A = \{x : x > 0$ ve $x < 100\}$ doğal sayılarından oluşan küme sonludur.
3. Bir çuval pirinçten oluşan küme sonludur.
4. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ doğal sayılar kümesi sonsuzdur.
5. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi sonsuzdur.

Küme İşlemleri

Birleşim

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

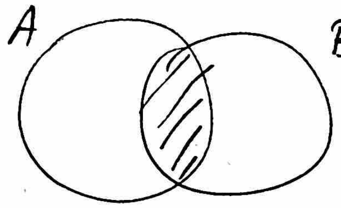


Örnek: $A=\{\{1\},\{2,3\},3\}$, $B=\{\{2,3\},\{1,3\},2\}$ olsun.

$$A\cup B=\{\{1\},\{2,3\},3,\{1,3\},2\}$$ olur.

Kesişim

$$A\cap B=\{x: x\in A \wedge x\in B\}$$



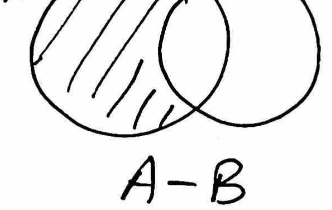
$A\cap B$

Yukarıdaki örnekte $A\cap B=\{\{2,3\}\}$ olur.

Tanım. A ve B birer küme olsun.
$A\cap B=\emptyset$ ise A ile B'ye ayrık kümeler denir.

Fark

$$A-B=\{x: x\in A \wedge x\notin B\}$$



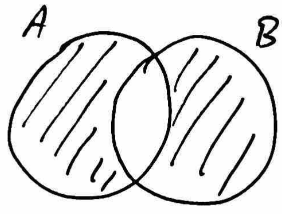
$A-B$

Görülebileceği gibi, $A-B\neq B-A$

Verilen örnekte, $A-B=\{\{1\},3\}$ olur.

Simetrik Fark

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$



$A \Delta B$

Örneğimizde,

$$A \Delta B = \{\{1\}, 3, \{1,3\}, 2\}$$ olmalıdır.

Her A ve B kümesi için,

$A \Delta B = B \Delta A$ olduğu görülür.

Teorem

(i) $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$

(ii) $A - A = \emptyset$

(iii) Eğer $A \cap B = \emptyset$ ise $A \Delta B = A \cup B$.

(iv) Eğer $A \subseteq B$ ve $B \subseteq C$ ise $A \subseteq C$

(v) Eğer $A \subseteq B$ ve $A \cap C \neq \emptyset$ ise $A \cap B \neq \emptyset$.