Soyut Matematik ve Mantık-II

4. Hafta Konu Özeti (sayfa 103-108)

Kartezyen Çarpım

Şu ana kadar "sıra" ya da "sıralama" kavramından bahsetmedik. Matematikte sıralı nesnelerden söz etmek için sıralı n-li kavramını tanımlamamız gerekir. Önce sıralı ikiliden söz edelim.

Tanım. x ile y iki nesne ise (x,y) nesnesi

$\{\{x\},\{x,y\}\}$ kümesi olarak tanımlanır.

(x,y) nesnesine sıralı ikili ya da sıralı çift denir. Bu sıralı ikilide x nesnesi birinci bileşen, y nesnesi ise ikinci bileşeni gösterir. Demek ki

$$(x,y) \neq (y,x).$$

Halbuki $\{x,y\} = \{y,x\}$

Teorem. $[(x,y)=(c,d)] \leftrightarrow [(x=c)\wedge(y=d)]$

Kanıt. $(x,y)=(c,d) \leftrightarrow \{\{x\},\{x,y\}\}=\{\{c\},\{c,d\}\}$

$$\leftrightarrow (\{x\}=\{c\}) \wedge (\{x,y\}=\{c,d\})$$

$$\leftrightarrow (\{x\}=\{c\}) \wedge (\{y\}=\{d\})$$

$$\leftrightarrow (x=c) \wedge (y=d)$$

Sıralı n-liler

(a_1,a_2,a_3) sıralı üçlüsü $(a_1,(a_2,a_3))$ biçiminde tanımlanır ki bu da

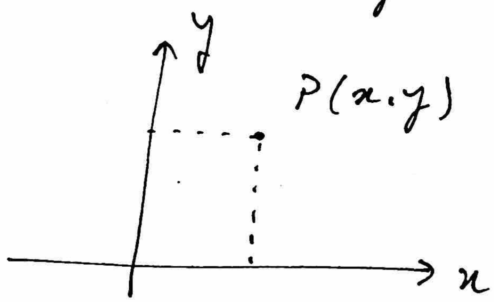
$$\{\{a_1\},\{a_1,a_2\},\{a_1,a_2,a_3\}\}$$ kümesidir.

(a_1,a_2,a_3,a_4) sıralı dörtlüsü $(a_1,(a_2,a_3,a_4))$ biçiminde tanımlanır.

$(a_1,a_2,\dots,a_n)$ sıralı n-lisi $(a_1,(a_2,\dots,a_n))$ şeklinde tanımlanır.

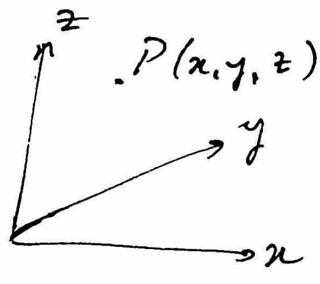
Sıralı n-liler en çok analitik geometride kullanılır.

Fransız matematikçi ve filozof René Descartes geometride uzunlukların sayısallaştırılması için bir yöntem geliştirmiştir. 2-boyutlu Öklid uzayında (düzlemsel uzay) birbirini dik olarak kesen iki eksen belirleyelim ve bunlara x ve y eksenleri diyelim



Bu uzayda her nokta bir sıralı ikiliye karşılık gelir.

Benzer kavramlar 3-boyutlu uzay için de genellenebilir.



Her bir noktanın bileşenleri bir reel sayıya karşılık gelir. Yani, ~~x, y, z birer~~

$x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}$.

Kartezyen çarpımlar :

<u>Tanım</u> A ve B birer küme olsun. A ile B kümelerinin kartezyen çarpımı $a \in A$ ve $b \in B$ olmak üzere tüm (a,b) sıralı ikililerden oluşan kümedir. Bu küme

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A \text{ ve } b \in B\}$$

olarak tanımlanır.

Genel olarak $(a,b) \neq (b,a)$ olduğuna göre

$$A \times B \neq B \times A \text{ olur.}$$

Ancak her durumda böyle olmak zorunda değildir.
Şimdi kartezyen çarpımla ilgili bazı örnekler verelim

<u>Örnek</u> $A = \{1,2,3\}$, $B = \{a,b\}$ olsun

$$A \times B = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$$

<u>Örnek</u> $A = \{\square, \Delta, 0\}$, $B = \{1,2,3\}$ olsun.

$$A \times B = \{(\square,1),(\square,2),(\square,3),(\Delta,1),(\Delta,2),(\Delta,3),(0,1),(0,2),(0,3)\}$$

<u>Örnek</u> $A = \{x,y\}$ olsun.

$$A \times A = \{(x,x),(x,y),(y,x),(y,y)\}$$

$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ birer küme olsun.

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{ (a_1, a_2, \dots, a_n) : a_i \in A_i \}$$

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n \text{ kez}}$$

Bazı özellikler

(i) $A = \emptyset$ veya $B = \emptyset$ ise $A \times B = B \times A = \emptyset$

(ii) Eğer $|A| = n$ ve $|B| = m$ ise $|A \times B| = n \times m$ olur.

(iii) $X \times X = Y \times Y \rightarrow X = Y$

(iv) $Y \subseteq Z \rightarrow (X \times Y) \subseteq (X \times Z)$

(v) $(X \subseteq Z) \wedge (Y \subseteq W) \rightarrow (X \times Y) \subseteq (Z \times W)$

(vi) $(X \times Y) = (Z \times W) \rightarrow (X = Z) \wedge (Y = W)$

(vii) $X \times Y = \emptyset$ ise $X = \emptyset$ veya $Y = \emptyset$.